Premier problème : Thermodynamique

$1^{ère}$ partie : Étude d'un réservoir à gaz

1.1

1.1.1 O_2 , N_2 , H_2 , Cl_2 , HCl (H_2O est triatomique)

1.1.2 on a $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ et $c_p - c_v = R$ donc $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ et $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$

A.N : $c_p = 29\ JK^{-1}mol^{-1}$ et $c_v = 20\ JK^{-1}mol^{-1}$

1.2

1.2.1 $N_1 = \frac{P_0V_1}{RT_0}$ A.N : $N_1 = 0.4\ mol$

1.2.2 équilibre mécanique $P_1 = P_R = 25\ 10^5 Pa$

1.2.3 $N = N_f - N_i = \frac{P_RV_1}{RT_1} - \frac{P_0V_1}{RT_0}$

1.2.4

$$\Delta U = \Delta U(gazN_1) + \Delta U(gazN) = N_1c_v(T_1 - T_0) + Nc_v(T_1 - T_0) = (N + N_1)\frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_0)$$

1.2.5 $W = -P_R(V_f - V_i) = -P_R(V_1 - (V_1 + V_N)) = P_RV_N$

1.2.6 1^{er} principe au système : $\Delta U = W + Q$ avec $Q = 0$ car les parois sont adiabatiques $(Cet\Pi)$, de plus la transformation est brutale les échanges thermiques sont lents entre le gaz du réservoir et le gaz poussé dans C_1 .

soit : $(N + N_1)\frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = P_RV_N$ or $V_N = \frac{NRT_0}{P_R}$ donc

$$\frac{P_RV_1}{RT_1}\frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = (\frac{P_RV_1}{RT_1} - \frac{P_0V_1}{RT_0})RT_0$$

d'où : $T_1 = \frac{\gamma T_0}{1 + (\gamma - 1)\frac{P_0}{P_R}}$ A.N : $T = 413K$

1.3

1.3.1 détente de Joule ou Joule-Gaylussac du gaz parfait

1.3.2 $\Delta U = W + Q$ avec le sytème isochore $W = 0$, adiabatique $Q = 0$ soit

$$(N + N_1)c_v(T_2 - T_1) = 0$$

càd : $T_2 = T_1$

1.3.3 non , on a : $dS_{GP} = \frac{nc_vdT + pdV}{T} \Longrightarrow \Delta S = nc_v \ln(\frac{T_f}{T_i}) + nR\ln(\frac{V_f}{V_i})$ qui est indépendante de la transformation car S est une fonction d'état , soit :

$$\Delta S = nR\ln(\frac{V_1 + V_2}{V_1}) = \frac{P_RV_1}{T_1}\ln(1 + \frac{V_2}{V_1})$$

la transformation adiabatique : $S^c = \Delta S = \frac{P_RV_1}{T_1}\ln(1 + \frac{V_2}{V_1}) > 0$ on retrouve que la transformation est irréversible

1.3.4 $\Delta S = 11\ JK^{-1}$, faible comparée à $1mol.c_p$ et $1mol.c_v$!

1.3.5 oui , en effet la pression n'est par la même :
- ν_1 puis ν_{12} donne $P_f = \frac{P_R V_1}{V_1+V_2}$
- ν_{12} puis ν_1 donne $P_f = P_R$

1.4

1.4.1 $n_2 = \frac{\frac{P_R}{x}(xV_0)}{RT_0} = \frac{P_R V_0}{RT_0}$

1.4.2 la vanne ν_1 est ouverte donc à l'équilibre du piston Π on a : $P_R = P_2 = \frac{n_2 RT}{V_2}$ soit $V_2 = V_0 \frac{T}{T_0}$

1.4.3 1^{er} principe au compartiment 2 : $\Delta U = W + Q$, la transformation étant adiabatique $Q = 0$ et $p_{ext} = P_R$ donc :

$$n_2 c_{v0}(T - T_0) = -P_N(V_2 - V_2^i) \Longleftrightarrow \frac{P_R V_0}{RT_0} 3R(T - T_0) = -P_R(V_0 \frac{T}{T_0} - xV_0) \Longleftrightarrow T(x) = \frac{3+x}{4} T_0$$

1.4.4 $n_2 = \frac{P_R V_0}{RT_0} = \frac{P_R V_2}{RT(x)} \Longrightarrow V_2 = \frac{3+x}{4} V_0$

1.4.5 $\Delta S = n_2 c_{v0} \ln(\frac{T(x)}{T_0}) + n_2 R \ln(\frac{V_2}{V_2^i}) = \frac{P_R V_0}{T_0}[3\ln(\frac{3+x}{4}) + \ln(\frac{3+x}{4x})]$

1.4.6 A.N :

1.4.6.1 $T(25) = 2100K$ et $\Delta S(x = 25) = 3,8\ JK^{-1}$

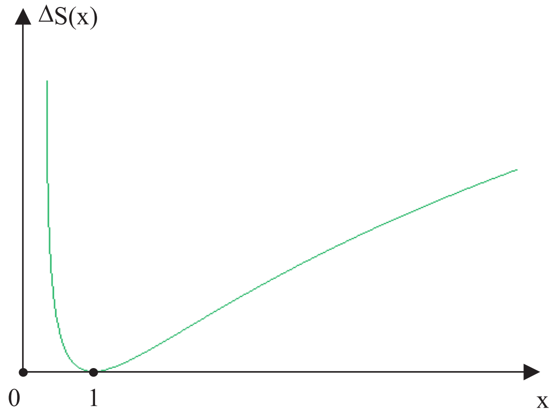
1.4.6.2 $\Delta S(x = 1) = 0$ et $\Delta S(x = 0^+) = +\infty$

1.4.6.3 le volume total de C est $V_1 + V_2 = 12L$ soit $V_{2max} = 12L$ càd :

$$x_{max} = \frac{V_{2max}}{V_0} = 120$$

ainsi $\Delta S(x = x_{max}) = 7,4\ JK^{-1}$

1.4.7 transformation adiabatique $\Delta S(x) = S^c > 0$



$2^{ème}$ partie :
Étude d'un moteur à piston

2.1

2.1.1 la pression est P_R , la transformation est monobare

2.1.2 $n_0 = \frac{P_R V_A}{\alpha R T_1}$

2.1.3 on applique le 1^{er} principe au gaz admis : $\Delta U = W + Q$ l'admission est aussi rapide que l'on peut négliger les échanges thermiques avec le gaz poussant ;

$$n_0 c_v (T_1 - T_0) = -P_R(\frac{V_A}{\alpha} - V_0)$$

avec V_0 le volume qu'occupe le gaz admis dans le réservoir , on a : $V_0 = \frac{n_0 R T_0}{P_R} = \frac{V_A T_0}{\alpha T_1}$

$$\Longrightarrow \frac{c_v}{R}(1 - \frac{T_0}{T_1}) = \frac{V_A}{\alpha}(1 - \frac{T_0}{T_1}) \Longrightarrow T_1 = T_0$$

2.1.4 $n_0 = \frac{P_R V_A}{\alpha R T_0} = \frac{25\ 10^5\ 0.8\ 10^{-3}}{5\ 8.31\ 300} = 0.16\ mol$

2.2

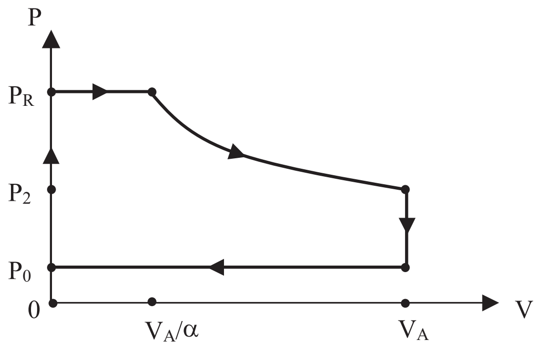
2.2.1 transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait donc : $P_R(\frac{V_A}{\alpha})^\gamma = P_2 V_A^\gamma \Longrightarrow P_2 = \frac{P_R}{\alpha^\gamma}$
A.N : $P_2 = 2.6\ 10^5\ Pa$

2.2.2 $V_i = \frac{V_A}{\alpha}$ et $V_f = V_A \Longrightarrow W_2 = \int(-PdV) = \int(-\frac{P_2 V_A^\gamma}{V^\gamma} dV)$

$$\Longrightarrow W_2 = \frac{P_R V_A}{(\gamma - 1)\alpha^\gamma}[1 - \alpha^{\gamma - 1}]$$

2.3

2.3.1 :



2.3.2 $W_0 = \oint(-PdV) = -P_R \frac{V_A}{\alpha} + W_2 + P_0 V_A \Longrightarrow$

$$W_0 = P_0 V_A - P_R \frac{V_A}{\alpha} + \frac{P_R V_A}{(\gamma - 1)\alpha^\gamma}[1 - \alpha^{\gamma - 1}]$$

A.N : $W_0 = -794\ J$

2.3.3 soit Δt la durée d'un cycle , on a : $D_1 = \frac{n_0 M}{\Delta t}$ et $|W_0| = P\Delta t$ d'où : $D_1 = \frac{P_R V_A}{\alpha R T_0} \frac{M P}{|W_0|}$ A.N : $D_1 = 20.4\ kg.h^{-1}$

2.3.3.1 $\Delta t = \frac{|W_0|}{P} = 0.794 s$

$3^{ème}$ partie :
Étude d'un moteur à turbine

3.1

3.1.1 le 1^{er} principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit : $\Delta(h + e_c + e_p) = w_i + q$ avec w_i travail massique indiqué et q chaleur massique.

3.1.2 ici la tuyère est calorifugée $q = 0$, et nécessairement $\Delta(e_c + e_p)$ est négligé , soit : pour un gaz parfait $\frac{c_p}{M}(T_f - T_0) = \frac{W_T}{M}$ car W_T et c_p sont molaires .

3.1.3 la transformation du gaz parfait est isentropique d'où :

$$T_f = T_0(\frac{P_R}{P_0})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Longrightarrow W_T = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}T_0[(\frac{P_R}{P_0})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1]$$

A.N : $W_T = -5.2\ kJ.mol^{-1} < 0$, il s'agit donc bien d'un moteur.

3.1.4 $D_2 = \frac{MP}{|W_T|} = 19kg.h^{-1}$

3.2

3.2.1 de même :

$$W'_T = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}T_0[(\frac{P_R}{P_0})^{\frac{1-k}{k}} - 1]$$

A.N : $W'_T = -3.1\ kJ.mol^{-1} < 0$

3.2.2 $D'_2 = \frac{MP}{|W'_T|} = 32kg.h^{-1}$

$4^{ème}$ partie :
Étude d'un moteur à réaction

4.1 le 1^{er} principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit :

$$\Delta(h + e_c + e_p) = w_i + q$$

avec ici $w_i = 0$ travail massique indiqué et $q = 0$ chaleur massique , Δe_p est nécessairement négligé ,donc :

$$\frac{c_p}{M}(T_f - T_0) + \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = 0$$

transformation isentropique : $T_f = T_0\ (\frac{P_R}{P_0})^{\frac{1-k'}{k'}} \Longrightarrow v = \sqrt{2\frac{\gamma RT_0}{M(\gamma-1)}[1 - (\frac{P_R}{P_0})^{\frac{1-k'}{k'}}]}$

A.N : $v = 269\ m.s^{-1}$

4.2 la puissance cinétique sera définie par : $P_c = \frac{dmv^2}{2}\ \frac{1}{dt} = \frac{v^2}{2}\ D_3 = 1\ kW$ soit :

$$D_3 = \frac{2}{v^2}P_c = 99.5\ kg.h^{-1}$$

Deuxième problème : Mécanique

$1^{ère}$ partie :
Mise en équation

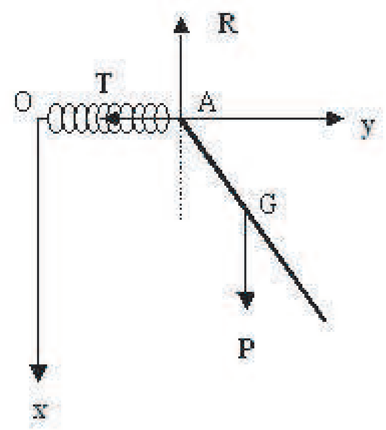
1.1

1.1.1 $x = \frac{2\ell}{2}\cos\theta = \ell\cos\theta$

1.1.2 $y = y_A + \frac{2\ell}{2}\sin\theta \Longrightarrow y_A = y - \ell\sin\theta$

1.2

1.2.1 :



1.2.2 $m\,\vec{a}(G)_R = \vec{T} + \vec{P} + \vec{R}$

1.2.3 sur l'axe Ox : $m\ddot{x} = -R + mg$

$$\Longrightarrow \vec{R} = -R\vec{x} = -m[\ell\ddot{\theta}\sin\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta + g]\vec{x}$$

sur l'axe Oy : $m\ddot{y} = -ky_A = -k(y - \ell\sin\theta)$

$$\Longrightarrow \ddot{y} + \omega_1^2 y = \omega_1^2 \ell \sin\theta$$

1.2.4 TMC en G par rapport à R_{gal} s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{M}_G(\vec{P}) + \vec{M}_G(\vec{T}) + \vec{M}_G(\vec{R})$$

1.2.5 on a : $\vec{\sigma}_G = J\dot{\theta}\vec{z}$,on projette le TMC sur Oz :

$[\vec{M}_G(\vec{P})].\vec{z} = [\overrightarrow{GG} \times \vec{P}].\vec{z} = 0$

$[\vec{M}_G(\vec{R})].\vec{z} = [\overrightarrow{GA} \times (-R\vec{x})].\vec{z} = -\ell R\sin\theta$

$[\vec{M}_G(\vec{T})].\vec{z} = [\overrightarrow{GA} \times (-ky_A\vec{y})].\vec{z} = k\ell y_A\cos\theta$

il vient donc :

$$(1 + 3\sin^2\theta)\ddot{\theta} = -3(\omega_1^2 + \dot{\theta}^2)\cos\theta\sin\theta + \frac{3}{\ell}\omega_1^2 y\cos\theta - \omega_2^2\sin\theta$$

$2^{ème}$ **partie :** Étude des petites oscillations de la barre

2.1 $\theta \approx 0 \Longrightarrow \sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$

donc :

$\ddot{y} + \omega_1^2 y = \omega_1^2 z$

$\ddot{z} + (3\omega_1^2 + \omega_2^2)z = 3\omega_1^2 y$

2.2

2.2.1 on a $\underline{y} = \underline{A}\exp i\Omega t \Longrightarrow \ddot{\underline{y}} = -\Omega^2\underline{A}\exp i\Omega t$ et $\underline{z} = \underline{B}\exp i\Omega t \Longrightarrow \ddot{\underline{z}} = -\Omega^2\underline{B}\exp i\Omega t$ en simplifiant par $\exp i\Omega t$, il vient :

$(\omega_1^2 - \Omega^2)\underline{A} - \omega_1^2 \underline{B} = 0$
$-3\omega_1^2 \underline{A} + (3\omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2)\underline{B} = 0$

2.2.2 le déterminant Δ du système est null

2.2.3

$$\Delta = 0 \Longleftrightarrow (\omega_1^2 - \Omega^2)(3\omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2) - 3\omega_1^4 = 0$$

soit : $\Omega^4 - (4\omega_1^2 + \omega_2^2)\Omega^2 + \omega_2^2\omega_1^2 = 0$

2.2.4 l'équation en 2.2.3 se résout en :

$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{(4\omega_1^2+\omega_2^2)\pm\sqrt{(4\omega_1^2+\omega_2^2)^2-4\omega_2^2\omega_1^2}}{2}}$, les équations sont linéaires , en faible mouvement ,donc par superposition des solutions on aura :

$$\underline{y}(t) = \underline{A}_1 \exp i\Omega_1 t + \underline{A}_2 \exp i\Omega_2 t$$

et

$$\underline{z}(t) = \underline{B}_1 \exp i\Omega_1 t + \underline{B}_2 \exp i\Omega_2 t$$

tel que les constantes $\underline{A}_1$,$\underline{A}_2$,$\underline{B}_1$ et$\underline{B}_2$ sont déterminées par les conditions initiales

2.3

2.3.1 on a : $y(0) = y_A(0) + \ell \sin\theta_0 = \ell\theta_0$; $z(0) = \ell\theta_0$; $\dot{y}(0) = 0$; $\dot{z}(0) = 0$ donc :

$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \ell\theta_0$
$\Omega_1\underline{A}_1 + \Omega_2\underline{A}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \underline{A}_1 = \underline{B}_1 = \frac{\Omega_2}{\Omega_2-\Omega_1}\ \ell\theta_0 < 0$
$\underline{B}_1 + \underline{B}_2 = \ell\theta_0 \quad \Longrightarrow \underline{A}_2 = \underline{B}_2 = \frac{\Omega_1}{\Omega_1-\Omega_2}\ \ell\theta_0 > 0$
$\Omega_1\underline{B}_1 + \Omega_2\underline{B}_2 = 0$

2.3.2

$$y(t) = \Re(\underline{y}(t)) = \frac{\Omega_2}{\Omega_2 - \Omega_1}\ \ell\theta_0 \cos(\Omega_1 t) + \frac{\Omega_1}{\Omega_1 - \Omega_2}\ \ell\theta_0 \cos(\Omega_2 t)$$

superposition de deux modes d'oscillations aux pulsations Ω_1 et Ω_2 (pendule + ressort)

2.3.3

$$\theta(t) = \frac{1}{\ell}\Re(\underline{z}(t)) = \frac{\Omega_2}{\Omega_2 - \Omega_1}\ \theta_0 \cos(\Omega_1 t) + \frac{\Omega_1}{\Omega_1 - \Omega_2}\ \theta_0 \cos(\Omega_2 t)$$

en accord car pour les faibles mouvements $y_A(t) \approx 0 \Longleftrightarrow y = \ell\theta$.

fin du corrigé